MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DURÉE : 2 heures

Est autorisé : l'usage d'une seule calculatrice de poche y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'une imprimante.

Note importante :

Les réponses non justifiées (par une démonstration ou un résultat précis du cours) ne seront pas prises en compte.

La qualité de la rédaction (présentation, orthographe, rigueur) entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$ et $J_n = \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n \, dt$.

On se propose d'étudier la suite (I_n), puis de donner l'expression de I_n en fonction de n.

1- Calculer I_0, I_1, J_0.

2- a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que la suite (I_n) converge vers une limite ℓ, appartenant à $[0,1]$.

c) Soit a un réel de $]0,1[$.

En utilisant la relation de Chasles, montrer, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$I_n \leq a + (1-a)(1-a^2)^n .$$

En déduire l'inégalité : $\ell \leq a$.

Quelle est la valeur de ℓ ?

3- a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de J_n et de n.

b) Donner l'expression de I_{n+1} en fonction de I_n et de J_n, puis montrer que :

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n .$$

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Problème

S et N désignent deux entiers vérifiant $S \geq 2$ et $N \geq 1$.
Un appareil à sous contient une somme de S euros et fonctionne de la manière suivante :

- on introduit 1 € dans l'appareil ;
- l'appareil rend 3 €, 2 € ou 0 € avec des probabilités respectives a, b, c non nulles et telles que $a + b + c = 1$;
- l'appareil cesse de fonctionner s'il ne contient plus que 1 € ou 0 €.

Un joueur possède une somme de N euros.

Partie I

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
Le joueur décide de faire n parties avec l'appareil. On désigne par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les sommes aléatoires que possède le joueur à l'issue de la 1re, 2e, …, n-ième partie.

1- a) Déterminer la loi de probabilité de X_1, ainsi que son espérance mathématique $E(X_1)$.

b) On suppose $N \geq 2$ et $S \geq 4$.
Déterminer la loi de probabilité de X_2 et son espérance mathématique.
Vérifier que : $E(X_2)-N=2\left[E(X_1)-N\right]$

2- a) A quelles conditions portant sur N et S, le joueur est-il assuré d'effectuer au moins n parties ?

b) On suppose ces conditions réalisées.
En considérant le gain algébrique de chaque partie, montrer que la variable aléatoire $X_n - N$ s'exprime comme une somme de n variables aléatoires suivant toutes la même loi.
En déduire $E(X_n)$ en fonction de n, N, a, b, c.

Partie II

Le joueur décide de prolonger le jeu jusqu'à ce qu'il soit ruiné ou jusqu'à ce qu'il ait fait « sauter » l'appareil, c'est-à-dire que celui-ci ne contienne plus que 1 € ou 0 €.
k et n étant deux entiers naturels, on désigne par $p_n(k)$ la probabilité que le joueur, possédant k euros à un moment donné du jeu, effectue alors n parties et soit ruiné à l'issue de ces n parties.
On a ainsi $p_0(0) = 1$ et $p_0(k) = 0$ si $1 \leq k \leq N + S$.

On pose enfin $p(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(k)$.

1- Préciser $p(0)$, $p(N + S)$ et $p(N + S - 1)$.

2- On suppose que l'on a $1 \leq k \leq N + S - 2$.

a) Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n, on a : $p_{n+1}(k) = a\, p_n(k + 2) + b\, p_n(k + 1) + c\, p_n(k - 1)$.
En déduire $p(k)$ en fonction de $p(k + 2)$, $p(k + 1)$ et $p(k - 1)$.

b) On considère la matrice colonne $V(k) = \begin{pmatrix} p(k-1) \\ p(k) \\ p(k+1) \end{pmatrix}$.
Déterminer une matrice M carrée d'ordre 3 telle que : $V(k+1) = M\, V(k)$.

3- On suppose à présent : $a = b = \frac{1}{5}$, $N = 2$, $S = 4$.

a) Vérifier que l'on a dans ce cas : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Calculer M^4.

c) En utilisant la question 2-b) exprimer $V(5)$ en fonction de M et de $V(1)$.

d) En déduire que $p(1)$ et $p(2)$ sont solutions d'un système que l'on déterminera.

e) Calculer $p(2)$, on l'exprimera sous forme d'une fraction irréductible.